カントル集合による，金融派生商品の価格モデルの検討

小　林　和　司

目　　次

はじめに

本論は，金融派生商品の価格理論に確率論が用いられている現実を踏まえ，確率論の立場から，金融派生商品の価格モデルが抱える1つの限界を示したものである。

本論では，まず金融派生商品の価格モデルの例としてブラック・ショールズのモデルをとりあげて，確率空間（Ω，F，P）の意味するところを明らかにし，$\Omega=[0,1]$ とみなすと，カントル集合NはΩの部分集合でありながら，$P(N)=0$ か $N\notin F$のどちらか一方を必ず満たすことを示した。これが意味するのは，本論第2節の議論が示すように確率空間を所与

としたモデルにおいて，現実の状況が無視されている可能性があるということである。

ここにモデルの1つの限界があると筆者は考える。

第1節　金融派生商品の価格モデル

本節ではまず(1)において，金融派生商品の価格モデルの前提という意味で，確率空間とその確率空間上の標準ブラウン運動過程を定義する。次に(2)では，金融派生商品モデルの1つの例としてブラック・ショールズのモデルをとりあげ，どのように理論展開がなされているかを追うことにする。

(1)　モデルの諸前提

確率空間が（Ω，F，P）として与えられているとする。ただしΩは，根元事象ωを要素とする標本空間であり，全事象を表わす。FはΩの部分集合（事象）の族であり，次の3つの条件を満たすとする。

(a)[1]　$\phi\in F$

(b)[2]　$A\in F$ ならば $A^c\in F$

(c)　$A_i\in F$ $(i=1,2,\cdots)$ ならば $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in F$

最後にPは，各事象 $A(\in F)$ に確率 $P(A)$ を対応させる集合関数であり，次の3つの条件を満たすとする。

(a)　$P(\Omega)=1$

(b)　$A\in F$ に対して $P(A)\geqq 0$

(c)　互いに排反する事象列 $A_i\in F$ $(i=1,2,\cdots)$ に対して $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ そしてPに関する期待値をEで表わすことにする。

この確率空間上の標準ブラウン運動過程を $\{B_t, t\geqq 0\}$ で表わす。標準ブ

ラウン運動過程は次の4つの性質によって定義される。

（a） $B_0=0$ がほとんど確実に（almost surely）成り立つ。

（b） 任意の $t, s(s>t)$ に対して，増分 B_s-B_t は平均0，分散 $s-t$ の標準正規分布に従う。

（c） すべての排反する時間区間における増分は独立である。

（d） 各 $\omega(\in\Omega)$ に対してサンプルパス $t\to B_t(\omega)$ は連続である。

（2） ブラック・ショールズのモデル[3]

1つの株式と1つの債券がある市場において，満期 T だけで支払いの発生する派生証券を考える。ここでは派生証券を，株式の価格過程 $\{S_t, 0\leqq t\leqq T\}$ に依存して支払いが決まる証券であるとする。満期での支払いを X で表わし，$E[X^2]<\infty$ と仮定する。

次に株式の価格過程は，確率微分方程式

$$dS_t=\mu(S_t, t)dt+\sigma(S_t, t)dB_t \tag{1·1}$$

に従うとする。ただし解の存在を保証するために，μ と σ は，ある $K, L>0$ に対して

$$\mu^2(x, t)+\sigma^2(x, t)\leqq K(1+x^2) \tag{1·2}$$

$$|\mu(x, t)-\mu(y, t)|+|\sigma(x, t)-\sigma(y, t)|\leqq L|x-y| \tag{1·3}$$

を満たすとする。(1·2) は増大条件，(1·3) はリプシッツ条件と呼ばれている。このとき，初期時点 $t=0$ で S_0 の値をとり，(1·1) に従う過程 $\{S_t\}$ が一意に存在する。

一方，債券の価格過程 $\{\beta_t, 0\leqq t\leqq T\}$ は，微分方程式

$$d\beta_t=\beta_t r(S_t, t)dt\ ;\ \beta_0>0 \tag{1·4}$$

に従うとする。(1·4) を解くことにより，債券の価格 β_t は

$$\beta_t=\beta_0\exp\left[\int_0^t r(S_u, u)du\right] \tag{1·5}$$

と与えられる。

さて，a_t，b_t をそれぞれ時点 t における株式と債券の保有数としたとき

$$(a, b)=\{a_t, b_t : 0 \leqq t \leqq T\} \qquad (1\cdot6)$$

はポートフォリオと呼ばれる(4)。ただし，$E\left[\int_0^T |a_t S_t|^2 dt\right] < \infty$ と仮定する。

価格過程が (1·1)～(1·4) のように与えられているとき，このポートフォリオで運用したとすれば，期間 $(0, t)$ における資金の累積の利益（負ならば損失）は，

$$\int_0^t a_u dS_u + \int_0^t b_u d\beta_u \qquad (1\cdot7)$$

で与えられる。もし投資期間中に資金の回収や追加がないとすれば，このポートフォリオの時点 t における価値は，初期時点における価値に，(1·7) の累積利益（または損失）を加えたものに等しい。すなわち時点 t におけるポートフォリオの価値を

$$Y_t \equiv a_t S_t + b_t \beta_t (0 \leqq t \leqq T) \qquad (1\cdot8)$$

とおけば

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t a_u dS_u + \int_0^t b_u d\beta_u \quad (0 \leqq t \leqq T) \qquad (1\cdot9)$$

が成立する。

(1·9) が成立するときに，このポートフォリオは自己充足的 (self-financing) と呼ばれる。そして満期での支払い X に対して

$$X = Y_T \qquad (1\cdot10)$$

がほとんど確実に成り立つとすると，これを満たすような自己充足的なポートフォリオが存在することが知られている。

ここで裁定機会は存在しないことにし，そのために (1·8)～(1·10) の条件に加えて，初期時点 $t=0$ における派生証券の価値 $\pi(X)$ がポートフォリオ (a, b) の時点 $t=0$ における価値 Y_0 に等しいことを要請しておく。つまり

$$\pi(X) = a_0 S_0 + b_0 \beta_0 \qquad (1\cdot11)$$

が成立するとする。

さて，派生証券の時点 t における価値 Y_t は，あるなめらかな2変数関数 $C(x,t)$ により

$$Y_t=C(S_t,t) \quad (0\leqq t\leqq T) \tag{1・12}$$

と書けるとし，さらに満期Tにおける派生証券の価値 Y_T が，ある連続関数 g によって

$$Y_T=g(S_T) \tag{1・13}$$

と書くことができるとする。

このとき（1・1）と（1・12）に伊藤氏の公式を適用すると

$$dY_t=\mu_Y(t)dt+C_x(S_t,t)\sigma(S_t,t)dB_t \qquad (1・14)^{(5)}$$

ただし　$\mu_Y(t)=C_x(S_t,t)\mu(S_t,t)+C_t(S_t,t)+\frac{1}{2}C_{xx}(S_t,t)\sigma^2(S_t,t)$

を得る。

他方，自己充足的なポートフォリオ（a,b）は（1・9）を満たすので

$$\begin{aligned} dY_t&=a_t dS_t+b_t d\beta_t \\ &=a_t\{\mu(S_t,t)dt+\sigma(S_t,t)dB_t\}+b_t\{\beta_t r(S_t,t)dt\} \\ &=\{a_t\mu(S_t,t)+b_t\beta_t r(S_t,t)\}dt+a_t\sigma(S_t,t)dB_t \end{aligned} \tag{1・15}$$

を得る。

そこで（1・14）と（1・15）の dB_t 項の係数を等しいとおくことにより

$$a_t=C_x(S_t,t) \tag{1・16}$$

が求められ，さらに（1・8）に(1・16)と（1・12）を代入することにより

$$b_t=\frac{1}{\beta_t}\{C(S_t,t)-C_x(S_t,t)S_t\} \tag{1・17}$$

が求められる。

次に（1・14）と（1・15）の dt 項の係数を等しいものとおき，その式に(1・16）と（1・17）を代入すれば，

$$\begin{aligned} &C_t(S_t,t)+\frac{1}{2}C_{xx}(S_t,t)\sigma^2(S_t,t)-r(S_t,t)C(S_t,t) \\ &\qquad +r(S_t,t)C_x(S_t,t)S_t=0 \end{aligned} \tag{1・18}$$

となるので，関数Cは，次の偏微分方程式を満たす。

すべての $(x,t)\in(-\infty,\infty)\times[0,T]$ に対して，

$$C_t(x,t)+\frac{1}{2}C_{xx}(x,t)\sigma^2(x,t)-r(x,t)C(x,t)$$
$$+r(x,t)C_x(x,t)x=0 \qquad (1\cdot19)$$

ここで境界条件は，

$$C(x,T)=g(x) \quad (-\infty<x<\infty) \qquad (1\cdot20)$$

である。

(1･19) と (1･20) の解は，ある条件のもとで[6]，次のように求められる。

$$C(x,t)=E\left[\exp\left\{-\int_t^T r(Z_s^{x,t},s)ds\right\}g(Z_T^{x,t})\right],$$
$$(x,t)\in(-\infty,\infty)\times[0,T] \qquad (1\cdot21)$$

ただし $Z^{x,t}$ は過程であって，次のように定義される。

$$\begin{cases} dZ_s^{x,t}=r(Z_s^{x,t},s)Z_s^{x,t}ds+\sigma(Z_s^{x,t},s)dB_s\,;\ s>t \\ Z_s^{x,t}=x\,;\ s\leqq t \end{cases} \qquad (1\cdot22)$$

以上のようにブラック・ショールズのモデルでは，確率空間が与えられているとき，派生証券の価格が(1･21)によって求められ，また自己充足的なポートフォリオが (1･16) と (1･17) によって求められることになる。

第2節　カントル集合による検討

本節では，まず（1）において確率空間を構成するΩとFとPがブラック・ショールズのモデルの中で具体的に何に対応しているのかを明らかにする。次に（2）では，カントル集合Nを導入して，$N\notin F$か $P(N)=0$ のいずれか一方が必ず成立することを示し，その意味付けを行う。

（1） 確率空間の解釈

前節のブラック・ショールズのモデルにおいて，$\{S_t, 0 \leqq t \leqq T\}$ と $\{\beta_t, 0 \leqq t \leqq T\}$ は過程であったので，共に確率変数の系である。ところが確率変数とは確率空間 (Ω, F, P) 上の可測関数のことであるので，可測関数の定義より，任数の実数 n に対して

$$\{\omega \in \Omega\ ;\ S_t(\omega) \leqq n\} \in F \tag{2·1}$$

$$\{\omega \in \Omega\ ;\ \beta_t(\omega) \leqq n\} \in F \tag{2·2}$$

が成立する。

$S_t(\omega)$ と $\beta_t(\omega)$ がそれぞれ時点 t における株価と債券価格を表わすことから，ω を要素とする集合 Ω は，株価と債券価格の決定に影響すると思われるすべての状況——経済情勢，政治情勢，気象条件など——の集合であると考えられる。

つまり，ある状況 $A(\in F)$ のもとでは，時点 t における株価と債券価格はそれぞれ $S_t(A), \beta_t(A)$ で与えられ，その状況 A が起こる確率は $P(A)$ として与えられる。

さて，今このすべての状況 Ω の各要素 ω を０以上１以下の実数への上への１対１対応によって置き換え，Ω が数直線上の閉区間 $[0, 1]$ で表現できたとする。このとき Ω の部分集合 A $(\in F)$ が起こる確率 P (A) は，A が数直線上に占める「長さ」を表わすことになる。

以上のように確率空間を解釈した上で，次項では，カントル集合 N を導入して議論を進めていくのであるが，説明の都合上，$N \in F$ と $N \notin F$ の２つの場合に分けて考えることにする。

（2） モデルの限界[7]

まず $N \in F$ の場合を考える。

今，数直線上の閉区間 $\Omega=[0,1]$ を3等分して，その真中の開区間を J_1 とする：

$$J_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\ ;\ P(J_1)=\frac{1}{3} \tag{2･3}$$

次に Ω から J_1 をとり除いた区間 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},1\right]$ を，それぞれ3等分し，その真中にある開区間を J_{21}, J_{22} とおく：

$$J_{21}=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right), J_{22}=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right) \tag{2･4}$$

記号の簡単のため，この和集合を J_2 とおく：

$$J_2=J_{21}\cup J_{22}\ ;\ P(J_2)=\frac{2}{9}\left(=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right) \tag{2･5}$$

同じようにして，次は Ω から J_1, J_2 をとり除いた区間をそれぞれ3等分して，その真中にある開区間を

$$J_{31}=\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right), J_{32}=\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right), J_{33}=\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right),$$

$$J_{34}=\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right) \tag{2･6}$$

とする。この和集合を J_3 とおく：

$$J_3=J_{31}\cup J_{32}\cup J_{33}\cup J_{34}\ ;\ P(J_3)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 \tag{2･7}$$

このように書くとわずらわしいが，図1のように以上の操作は，次から

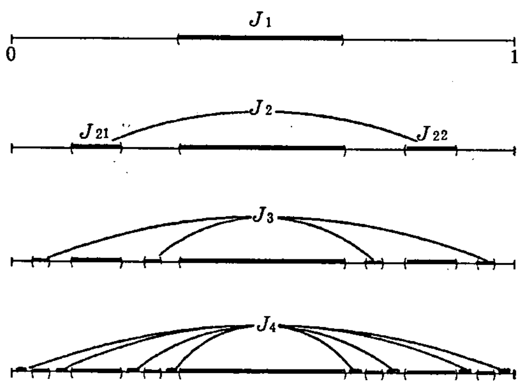

図 1

次へと続けられる。このようにして互いに排反する集合系列

$$J_1, J_2, \cdots, J_n, \cdots \tag{2・8}$$

が得られる。

J_nは有限個の開区間から成り

$$P(J_n)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \tag{2・9}$$

である。さらに $J=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$ とすれば

$$\begin{aligned} P(J)&=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}P(J_n)^{(8)}\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\\ &=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\\ &=1 \end{aligned} \tag{2・10}$$

となる。

Ωから，上で定義したJをとり除いて得られる集合をカントル集合という。カントル集合は，図1で太く画かれている線分を次々に除いていって得られた究極の集合であるので，ごくわずかな点しか含んでいないのではないかという疑問が生じても不思議ではない。

しかしカントル集合は実は多くの点から成っている。それは図1と，$0\leqq\alpha\leqq1$ を満たす実数の3進小数展開とを対比して考えてみればよい。

実際 J_n に属する点は，3進展開したとき，小数点以下n位のところに1の現われる数から成っている。従ってカントル集合は，3進数を用いて無限小数展開したとき

$$0.22202002\cdots\ ;\ 0.002020020\cdots \tag{2・11}$$

のように，1の現われない小数全体と0とから成る。

カントル集合に属する実数を上のように無限3進小数で展開したとき，

小数表示の中に現われた2を1に置き換えてみる。例えば（2・11）に対して

$$0.11101001\cdots;0.001010010\cdots \tag{2・12}$$

を考えてみる。これを2進数を用いた[0,1]に属する実数の無限小数展開と考えることにすると，この書き換えは，（3進有限小数を除いて）カントル集合から閉区間[0,1]の上への1対1対応を与えている（0は0に対応させる)。その意味で，カントル集合はΩの要素と同じ程度の点を含んでいる。

さてカントル集合Nは，定義により

$$\Omega=J\cup N(J\cap N=\phi) \tag{2・13}$$

を満たす。今仮定により$N\in F$であるので，Fに関する条件（b）より$J\in F$となる。

さらにPに関する条件（c）より

$$P(J\cup N)=P(J)+P(N) \tag{2・14}$$

が成立するが，(2・13）と（2・10）より

$$P(\Omega)=1+P(N) \tag{2・15}$$

であるので，Pに関する条件（a）より

$$P(N)=0 \tag{2・16}$$

となる。

このことがモデルにおいて意味することを考えてみると，本来考慮するべき状況の集合Fのうちで，Nは決して起こらない状況であると始めから仮定してしまっていることになる。

他方，$N\notin F$である場合を考えよう。

この場合，$P(N)$の値は求められない。なぜなら，Pに関する条件(b)からわかるように，PはFの要素に対してのみ，確率を付与するものだからである。

このことがモデルにおいて意味することを考えてみると，全状況を表わす集合Ωのうちで，Ωの部分集合であるNという状況は，公理的に考える対象からはずされているということになる。

以上のことをまとめてみると，Ωを閉区間$[0,1]$とみなしたとき，Ωの部分集合としてカントル集合Nが存在しているのであるが，$P(N)=0$ あるいは$N\notin F$のいずれか一方が必ず成立する。

従って確率空間を所与としてモデルを作成する場合，Ωの部分集合のうちで考察対象とならない集合が必ず存在する。これは確率空間を所与としたことから来る必然的な帰結である。

そこでブラック・ショールズのモデルにおいても，現実には起こるかもしれない状況を，一部無視して派生証券の価格や，自己充足的なポートフォリオを求めていることになるのである。

このことは，より一般的に，確率空間を所与として作成されたモデルすべてに対してあてはまることである。

おわりに

よく言われるように，「数学モデルはあくまでも現実問題の近似であり，これはモデルを如何に複雑化しても変わるものではない。単に近似の程度が変わるだけであって，絶対的に正しいモデルというものは存在しないのである。もし絶対的に正しいならば，もはやそれは“モデル”ではなく“そのもの”であり，モデルの重要性はできるだけ単純な形で本質的なものを描いて見せることである。」[9]

言うまでもなくこれは正しい主張であるが，数学モデルが現実への近似にとどまっている原因が何であるか，換言すれば数学モデルの持つ限界というものをよくわきまえた上で，モデルを扱うことが望ましいのは言うま

でもない。

本論の結論は，そうしたモデルの持つ限界の１つを明らかにすることにあった。

≪註≫

（1）ϕは空集合を示す。

（2）A^cはAの補集合（ΩからAをとり除いた集合）を示す。

（3）本項は，主として次の文献からの引用である。
木島正明『ファイナンス工学入門』第Ⅱ部，日科技連，1994年，25～31ページ。Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory,* Princeton University Press, 1992, pp. 85～87.
なお，ブラック・ショールズのモデルは，幾何ブラウン運動で危険証券の価格 S_t を表わし，安全利子率 $r(S_t, t)$ を一定とするのが普通であるが，本文ではそれを一般化して述べている。

（4）ブラック・ショールズのモデルでは，ポートフォリオを組替える際の手数料や税金などは考えないものとする。

（5）C_x と C_{xx} はそれぞれ，$C(x, t)$ の x に関する１階と２階の偏微分を表わす。C_t についても同様である。なお伊藤氏の公式については，木島正明『ファイナンス工学入門』第Ⅰ部，日科技連，1994年，166ページを参考にした。

（6）Duffie, *op. cit.*, p. 87 と付録Eによれば，その条件とは，ある正定数M, αに対して

$$|C(x, t)| \leqq M(1+x^\alpha), (x, t) \in (-\infty, \infty) \times [0, T]$$

が成立し，かつσ, g, rがリプシッツ条件を満たし，rが非負であり，さらに$\sigma, g, r, \sigma_x, g_x, r_x, \sigma_{xx}, g_{xx}, r_{xx}$が存在して，かつ連続であり，かつ増大条件を満たすことである。

（7）本項におけるカントル集合の導出及び解説（図も含む）は次の文献からの引用である。
志賀浩二『ルベーグ積分30講』朝倉書店，1994年，19～21ページ。

（8）この式の変形が可能であるのは，$N \in F$ という仮定と F に関する条件（b）及び（2･13）より

$$N^c = J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \in F$$

となるので，Pに関する条件（c）を使用することができるからである。

（9）前掲『ファイナンス工学入門』第Ⅱ部，22ページより引用した。